



# GRÁFICOS DE **CONTROL** ESPECIALES



# GRÁFICOS DE CONTROL ESPECIALES

Los gráficos de control de Shewhart, para variables y para atributos, funcionan bien como instrumentos para detectar variación especial en la mayoría de los casos, algunas veces se requiere de gráficos alternativos para situaciones inusuales. Nuestro e-book sobre las siete herramientas de la calidad es una buena referencia para empezar a conocer los gráficos de control (7 Herramientas de la Calidad).

La siguiente es la lista de gráficos especiales que cubriremos en esta serie:

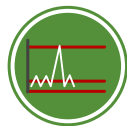


Gráfico G

Situaciones que ocurren raramente (muy baja frecuencia o mucho tiempo entre ocurrencias).

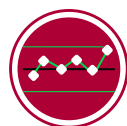


Gráfico de promedio móvil

Detectar cambios de variación de los procesos menores a 1.5 desviaciones estándar.

Muy útil para procesos continuos.

Más sencillo de calcular que otros gráficos para detección de cambios pequeños en la variación.



Gráfico EWMA

Detectar cambios en la variación de los procesos menores a 1.5 desviaciones estándar. Se basa en datos históricos y no solamente en la última muestra recolectada. Permite al analista planear con anticipación si quiere más atención a los datos históricos o a los datos más recientes.



Gráfico CuSum

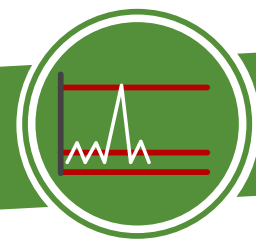
Detectar cambios en la variación de los procesos menores a 1.5 desviaciones estándar. Una vez definida una meta, el gráfico monitorea desviaciones de esa meta y ayuda a detectar cambios pequeños (entre 0.5 y 1 sigma).



Gráfico de Puntos Individuales

Creado por David Laney quien propone una corrección al problema de grandes muestras (Quality Engineering 6/2002). De acuerdo con Laney es un error asumir que toda la variación se da dentro de cada muestra y no se considera la variación de muestra a muestra. La propuesta es usar un valor estandarizado Z y la determinación de una desviación estándar ( $\sigma_z$ ) que explica la variación entre grupos.

# GRÁFICO G



¿Cómo darle seguimiento, y de paso encontrar algún patrón, a datos que son muy escasos o de rara ocurrencia? Por ejemplo: cirugías incorrectas, caídas de pacientes, días desde el último accidente, errores en estados de cuenta, días entre ausencias de cierto empleado o cierto estudiante. La frecuencia de estos eventos generalmente es muy baja y puede pasar mucho tiempo entre eventos. El Dr. James Benneyan, de Northeastern University, propuso una ingeniosa herramienta para este tipo de situaciones. Es un gráfico muy sencillo conocido como Gráfico G, así llamado porque está basado la Distribución Geométrica. Esta distribución tiene las siguientes características:

- El proceso consta de un número no definido de pruebas o experimentos separados o separables. El proceso concluirá cuando se obtenga por primera vez el resultado deseado (éxito).
- Cada prueba puede dar dos resultados mutuamente excluyentes: A y no A.
- La probabilidad de obtener un resultado A en cada prueba es  $p$  y la de obtener un resultado no A es  $q$  siendo  $(p + q = 1)$ .

La genialidad del Gráfico G está en graficar el tiempo entre eventos en lugar de los eventos como tales. Vamos directo a un ejemplo reciente. Desde el año 2014 el Volcán Turrialba en Costa Rica aumentó notablemente su actividad. Veamos primero las erupciones registradas desde el año 2010 hasta la primera erupción del 2014.



5 de enero 2010



21 de mayo 2013



30 de octubre 2014



A partir del 30 de octubre del año 2014 el volcán cambia su patrón de actividad con erupciones más frecuentes. Esta vez vamos a agregar una columna que nos indique los días entre erupciones y vamos a ver el comportamiento hasta el mes de julio del 2016.

Fecha	Días entre erupciones
1/5/2010	0
5/21/2013	1232
10/30/2014	527
11/1/2014	2
12/8/2014	37
3/2/2015	84
4/5/2015	34
4/7/2015	2
4/23/2015	16
4/24/2015	1
5/4/2015	10
10/31/2015	180
5/1/2016	183
5/12/2016	11
5/18/2016	6
5/19/2016	1

Fecha	Días entre erupciones
5/20/2016	1
5/21/2016	1
5/24/2016	3
5/25/2016	1
5/27/2016	2
6/2/2016	6
6/3/2016	1
6/4/2016	1
6/10/2016	6
6/16/2016	6
6/19/2016	3
6/24/2016	5
7/7/2016	13
7/22/2016	15
7/25/2016	3

El Gráfico G (días entre erupciones) nos ayudará a entender mejor los datos.



Claramente se comprueba el aumento de actividad en el volcán. Los 1,232 días entre la primera y segunda erupción tienen un efecto sobre la escala, sin embargo, es claro el patrón de aumento de actividad.

Fecha	Días entre erupciones
09/19/16	56
09/20/16	1
09/22/16	2
09/26/16	4
10/03/16	7
10/04/16	1
10/05/16	1
10/06/16	1
10/07/16	1
10/08/16	1
10/09/16	1
10/10/16	1
10/11/16	1
10/12/16	1
10/13/16	1
10/14/16	1

¿Qué ha pasado desde julio del 2016? Lejos de menguar, el volcán se ha mantenido activo, y sigue activo hasta muy recientemente. Veamos cómo se ve el comportamiento de las erupciones hasta julio del 2017.

Fecha	Días entre erupciones
10/15/16	1
10/16/16	1
10/17/16	1
10/23/16	6
11/09/16	17
01/27/17	79
02/09/17	13
02/13/17	4
03/27/17	42
04/02/17	6
04/17/17	15
05/08/17	21
05/27/17	19
06/16/17	20
07/10/17	24

El nuevo Gráfico G nos presenta interesantes interrogantes. Veamos el gráfico.



Después de un período muy intenso del 4 al 17 de octubre se nota un posible cambio en el patrón, ¿será este patrón estadísticamente válido, o es muy pronto para decir si el volcán está bajando su actividad?

**NOTA IMPORTANTE:** para efectos de Excel, en el eje X del gráfico no se ponen las fechas sino nada más el consecutivo de eventos, en el eje Y se agregan los días entre eventos. La función para restar días entre dos fechas es =days(fecha1, fecha2). Además, el Gráfico G ha sido agregado recientemente a los softwares estadísticos comerciales de mayor uso. También se puede encontrar en los paquetes qcc y qicharts de R.

Benneyan propone límites de control basados en la teoría de Walter Shewhart (el abuelo del control de la calidad), y ese será nuestro tema de la próxima semana. Por ahora, disfruten de esta simple herramienta que nos permite investigar patrones de eventos que ocurren raramente.

vamos a usar los datos de las erupciones del Volcán Turrialba (Costa Rica) desde el 19 de setiembre del 2016 hasta el 10 de julio del 2017. A continuación, el gráfico.:

Fecha	Días entre erupciones
09/19/16	56
09/20/16	1
09/22/16	2
09/26/16	4
10/03/16	7
10/04/16	1
10/05/16	1
10/06/16	1
10/07/16	1
10/08/16	1
10/09/16	1
10/10/16	1
10/11/16	1
10/12/16	1
10/13/16	1
10/14/16	1
10/15/16	1
10/16/16	1
10/17/16	1
10/23/16	6
11/9/16	17
01/27/17	79
02/09/17	13
02/13/17	4
03/27/17	42
04/02/17	6
04/17/17	15
05/08/17	21
05/27/17	19
06/16/17	20
07/10/17	24

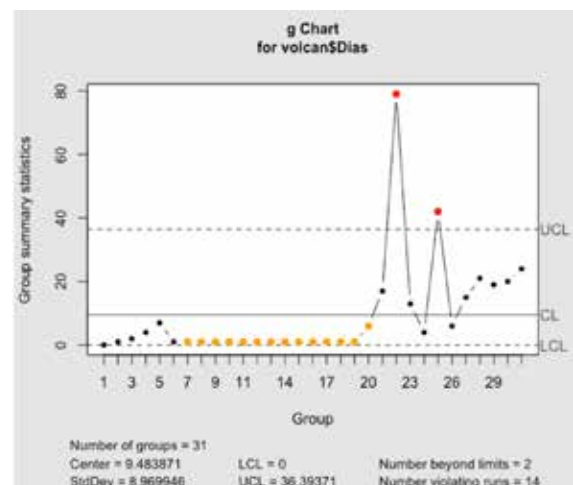


Nuevamente surge la interrogante ¿está disminuyendo la actividad del volcán? Esta vez vamos a agregar límites de control (dos propuestas) utilizando R y Minitab.

Primero vamos a usar el paquete qicharts de R.

El código para generar el gráfico es el siguiente:

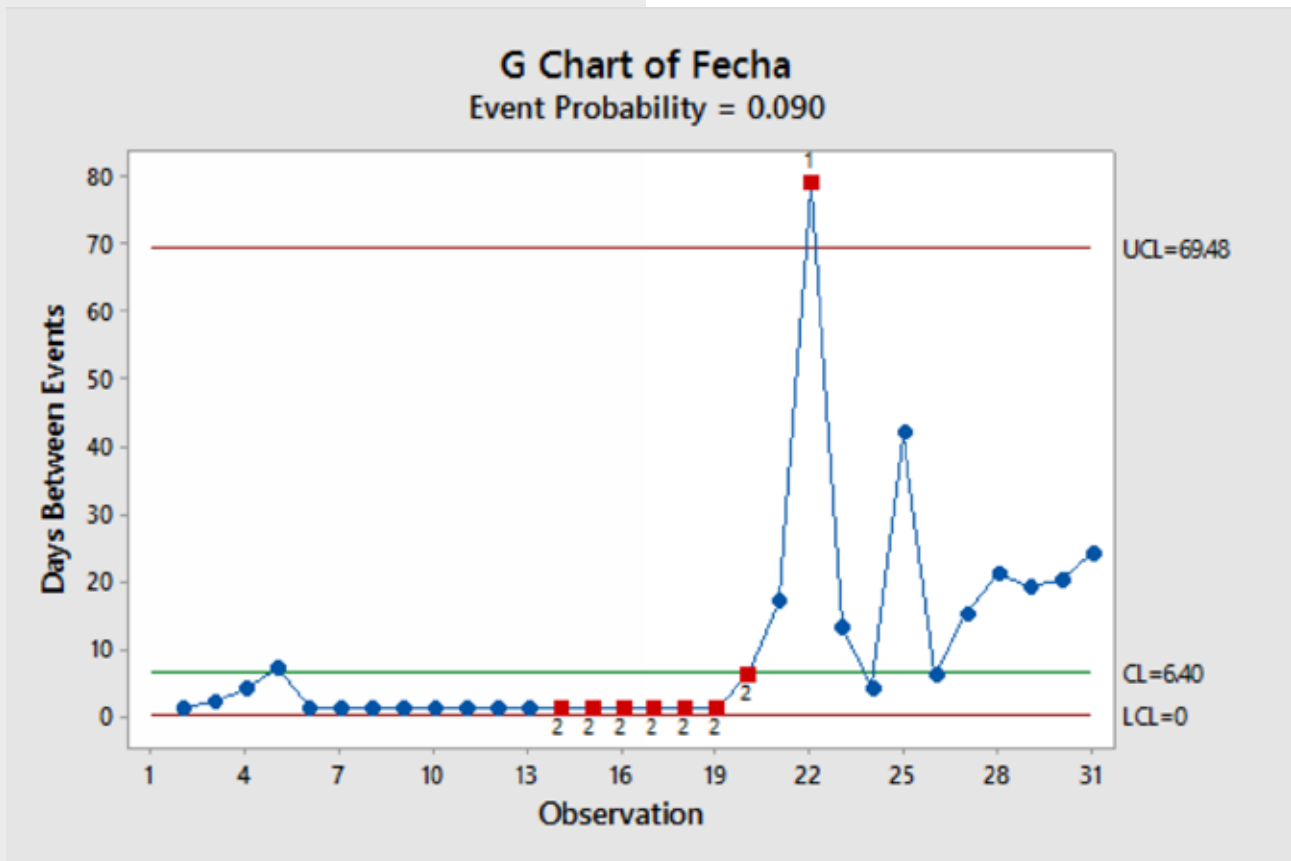
```
volcan <- read.csv("volcan.csv")
install.packages("qcc")
library(qcc)
qcc(volcan$Dias, type = "g")
```



El paquete simplemente calcula el promedio y la desviación estándar de los días entre erupciones y calcula el centro y límites de la forma tradicional  $\pm 3$  desviaciones estándar. Como en otros gráficos, el límite inferior es generalmente negativo y por lo tanto se hace cero.

Minitab usa límites probabilísticos para evitar falsas alarmas. Como la distribución geométrica es muy sesgada a la derecha el límite superior sea muy bajo con respecto a la distribución. Del mismo modo que en el gráfico generado en R, el límite inferior es cero. Para una explicación completa [ver aquí](#).

El resultado en Minitab, considerando límites probabilísticos es el siguiente:

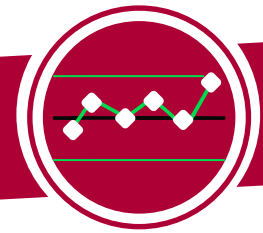


La lectura, o lecturas sobre el límite superior parecen indicar que la frecuencia de erupciones estaría empezando a disminuir, el Ovsicori (Observatorio Vulcanológico y Sismológico de Costa Rica) se mantiene alerta y no baja la guardia, y todavía no recomienda reanudar actividad turísticas y agrícolas normales en la zona.

El Lean y Six Sigma constantemente estamos agregando herramientas a nuestra enorme caja, y esa es una de las principales razones por las que ambas metodologías siguen creciendo después de tantos años. Con el Gráfico G tenemos a disposición una nueva forma de investigar patrones cuando tenemos muy pocos datos, hagámoslo parte de nuestra caja de herramientas.



# GRÁFICO PROMEDIO MÓVIL



## Usos:

- Para datos continuos.
- Para detectar cambios pequeños en la variación.
- Para procesos continuos (procesos químicos, procesos de industria alimentaria, entre otros).
- Cuando solamente hay una muestra por período.

## Promedio móvil

(el dato que se grafica)

Se determina el promedio de las  $w$  unidades que se agrupan. Para cada período  $i$  se elimina el dato más viejo de los  $w$  datos agrupados. El promedio móvil se calcula:

## Límites de control (Forma 1) \*

Calcular los límites basados en las constantes tradicionales de Shewhart para tamaños de muestra  $w$ .

Línea de Centro = promedio de todos los datos en estudio.

Donde:

$\bar{X}$  es el promedio de todos los valores en estudio.

$A_2$  es una constante que depende del tamaño de  $w$ .

Los valores más comunes de  $A_2$  son:

$w$	$A_2$	$w$	$A_2$
2	1.88	5	0.58
3	1.02	6	0.48
4	0.73	7	0.42

\* La Forma 1 fue propuesta por Grant y Leavenworth en el libro: [Statistical Quality Control](#).

## Límites de control (Forma 2) \*\*

Utilizar un centro objetivo (target value).

Calcular la desviación estándar de los datos en estudio, o conseguir una desviación estándar histórica.

Línea de centro: valor objetivo.

$$LSC = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}}$$

$$LSC = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}}$$

\*\* la Forma 2 la propone Douglas Montgomery en su libro: [Introduction to Statistical Quality Control](#).

Donde:

es el valor objetivo.

es el valor de la desviación estándar.

w es el número de unidades que se usan en el promedio móvil.

Ejemplo del cálculo del Promedio Móvil

Una planta hace un análisis diario para determinar el porcentaje de cierto químico en su material prima, producto en proceso y producto terminado. El efecto suavizador del gráfico es similar a lo que le pasa cuando se agregan mezclan y/o se licúan componentes en un proceso de producción continuo. Los datos de los primeros 10 días de producción se muestran a continuación:

Fecha	Valor diario	Prom. Móvil 3 días	Prom. Móvil Corresponde a
1-Sep	0.24		
2-Sep	0.13		
3-Sep	0.11	0.160	Primeros 3 días
4-Sep	0.19	0.143	Días 2, 3 y 4
5-Sep	0.16	0.153	Días 3, 4 y 5
6-Sep	0.17	0.173	Días 4, 5 y 6
7-Sep	0.13	0.153	Días 5, 6 y 7
8-Sep	0.17	0.157	Días 6, 7 y 8
9-Sep	0.10	0.133	Días 7, 8 y 9
10-Sep	0.14	0.137	Días 8, 9 y 10

Tabla 1. Porcentaje de CaO sin reaccionar en la etapa intermedia de un proceso químico. *Statistical Quality Control. Grant y Leavenworth.*

Observe cómo el promedio móvil de 3 valores se calcula a partir del tercer día. En el cuarto día el promedio móvil corresponde a los días 2, 3 y 4, se “bota” el dato más antiguo de la serie de tres datos y se agrega el más nuevo. El día 5, se elimina el dato del día 2 y se agrega el dato del día 5, y así sucesivamente.

Vamos a completar el set de datos y hacer el gráfico de promedio móvil.

Fecha	Valor diario	Prom. Móvil 3 días
1-Sep	0.24	
2-Sep	0.13	
3-Sep	0.11	0.160
4-Sep	0.19	0.143
5-Sep	0.16	0.153
6-Sep	0.17	0.173
7-Sep	0.13	0.153
8-Sep	0.17	0.157
9-Sep	0.10	0.133
10-Sep	0.14	0.137
11-Sep	0.16	0.133
12-Sep	0.14	0.147
13-Sep	0.17	0.157
14-Sep	0.15	0.153
15-Sep	0.20	0.173
16-Sep	0.26	0.203
17-Sep	0.16	0.207
18-Sep	0.00	0.140
19-Sep	0.18	0.113
20-Sep	0.18	0.120

Fecha	Valor diario	Prom. Móvil 3 días
21-Sep	0.20	0.187
22-Sep	0.11	0.163
23-Sep	0.30	0.203
24-Sep	0.21	0.207
25-Sep	0.11	0.207
26-Sep	0.17	0.163
27-Sep	0.18	0.153
28-Sep	0.13	0.160
29-Sep	0.28	0.197
30-Sep	0.16	0.190
1-Oct	0.14	0.193
2-Oct	0.16	0.153
3-Oct	0.14	0.147
4-Oct	0.10	0.133
5-Oct	0.13	0.123
6-Oct	0.20	0.143
7-Oct	0.14	0.157
8-Oct	0.10	0.147
9-Oct	0.18	0.140
10-Oct	0.11	0.130

Tabla 2. Porcentaje de CaO sin reaccionar en la etapa intermedia de un proceso químico. Datos completos Statistical Quality Control. Grant y Leavenworth.

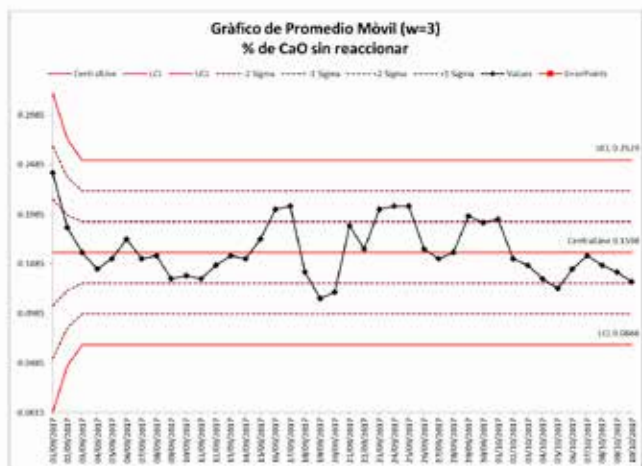


Gráfico 1  
Gráfico de promedio móvil (3 periodos)  
% de CaO sin reaccionar

Los primeros dos cálculos de los límites se hacen con  $w=1$  y  $w=2$ , por eso son más anchos que el resto. Además, en el primer promedio móvil solamente hay un dato, mientras que el segundo es el promedio de los dos primeros datos. Del tercero en adelante los límites se estabilizan con  $w=3$  periodos.

El gráfico de promedio móvil da una mejor idea del comportamiento del porcentaje sin reaccionar de CaO que un gráfico de puntos individuales.

Conocer los usos específicos de los diferentes gráficos de control (tradicionales o especiales) permite un mejor análisis del comportamiento de la variación en los procesos. Continuaremos en la siguiente ocasión con el gráfico EWMA, digamos por ahora que es un promedio móvil con esteroides.

# GRÁFICO EWMA



El gráfico EWMA (promedio móvil exponencialmente ponderado) permite suavizar efectos de ruido que no puede ser controlado directamente en los datos, y permite darle mayor peso a los datos históricos o a los datos más recientes. Es de gran ayuda para detectar cambios pequeños en los procesos.

## Usos

Para datos continuos.

Se quieren detectar pequeños cambios en el proceso.

Cuando se quiere medir la variación alrededor de un valor objetivo.

Cuando se quiere suavizar el efecto de ruido que no se puede controlar en los datos.

El promedio móvil exponencialmente ponderado se calcula como:

$$Z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$$

Promedio móvil  
exponencialmente  
ponderado  
(el dato que se grafica)

Donde  $0 < \lambda \leq 1$  es una constante.

El primer valor del gráfico se define como el objetivo o meta del proceso, de tal manera que

$$Z_0 = \mu_0$$

El valor de lambda se puede interpretar como que se dará un peso de  $\lambda$  al último valor de  $x_i$  y un peso de  $(1 - \lambda)$  a los valores históricos antes de  $x_i$ .

Los límites de control y la línea central del gráfico se calculan de la siguiente manera:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$\text{Línea Central} = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

Límites de control

El factor L es el ancho de los límites de control (3 para límites +/- 3 sigma).

El factor  $[1 - (1-\lambda)^{2i}]$  se aproxima a 1 cuando i crece. Los límites entonces toman la forma:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

Los valores de  $\lambda$  más usados están entre 0.05 y 0.25, y el valor de L más usado es  $L = 3$  desviaciones estándar.

### Ejemplo 1 de Gráfico EWMA

Los siguientes datos son tomados del Engineering Statistics Handbook del NIST, en la sección 6.3.2.4 [EWMA Control Charts](#).

DATOS NIST EWMA	DATOS NIST EWMA	DATOS NIST EWMA
52	50	47.8
47	51.2	51.2
53	50.5	52.6
49.3	49.6	52.4
50.1	47.6	53.6
47	49.9	52.1
51	51.3	

Tabla 1. Datos para gráfico EWMA de página del NIST (link indicado arriba)

Se desea establecer un gráfico EWMA con las siguientes características:

#### DATOS NIST EWMA

Valor Nominal (objetivo)	50
Lambda	0.3
L (ancho en desviaciones estándar)	3
Desviación Estándar histórica	2.0539

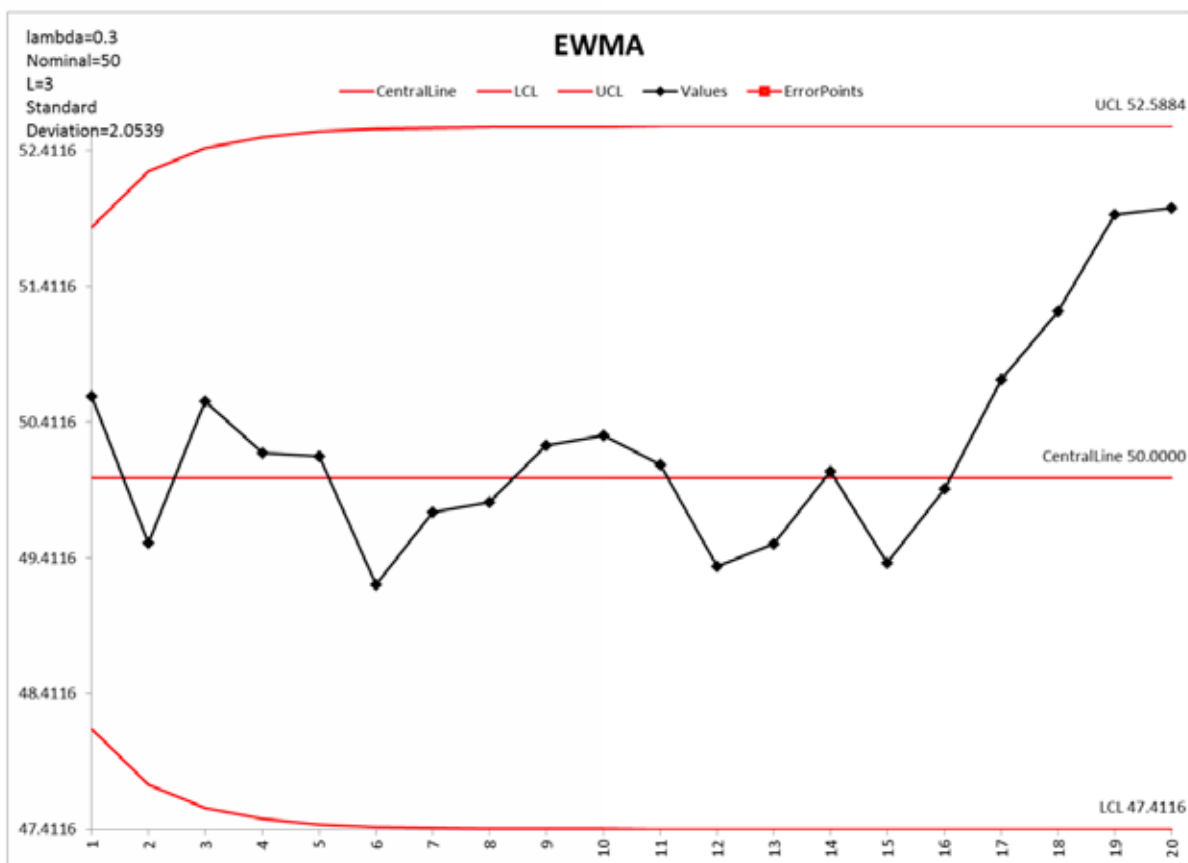


Gráfico 1. Gráfico de Control EWMA

El gráfico indica un estado de control. Sin embargo, se observa una tendencia hacia arriba en los últimos cinco puntos que podría indicar que algo ha cambiado en el proceso.

#### Cálculo de los valores de $Z_i$ para el Ejemplo 1.

El valor inicial  $Z_0$  para iniciar los cálculos es:

De ahí en adelante los valores a graficar se calculan mediante la fórmula:

i	$Z_i$
1	$Z_1 = 0.3 \cdot 52 + (1 - 0.3) \cdot 50 = 50.6$
2	$Z_2 = 0.3 \cdot 47 + (1 - 0.3) \cdot 50.6 = 49.5$
3	$Z_3 = 0.3 \cdot 53 + (1 - 0.3) \cdot 49.5 = 50.56$

Tabla 2. Los tres primeros valores del Gráfico 1 EWMA

Puede confirmar el resto de los valores de  $Z_i$ :

i	$Z_i$
1	50.6000
2	49.5200
3	50.5640
4	50.1848
5	50.1594
6	49.2116
7	49.7481
8	49.8237
9	50.2366
10	50.3156
11	50.1009
12	49.3506
13	49.5154
14	50.0508
15	49.3756
16	49.9229
17	50.7260
18	51.2282
19	51.9398
20	51.9878

Tabla 3. Todos los valores del Gráfico 1 EWMA

## Cálculo de los límites de control

Note que los límites de control se van abriendo hasta llegar a un valor fijo. Las fórmulas para los límites de control son las siguientes:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

i	LIC
1	$50 - 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)} [1 - (1-0.3)^{2 \cdot 1}]} = 48.15$
2	$50 - 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)} [1 - (1-0.3)^{2 \cdot 2}]} = 47.74$
3	$50 - 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)} [1 - (1-0.3)^{2 \cdot 3}]} = 47.57$
4*	$50 - 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)}} = 47.41$

i	LSC
1	$50 + 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)} [1 - (1-0.3)^{2 \cdot 1}]} = 51.85$
2	$50 + 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)} [1 - (1-0.3)^{2 \cdot 2}]} = 52.26$
3	$50 + 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)} [1 - (1-0.3)^{2 \cdot 3}]} = 52.43$
4*	$50 + 3 \cdot 2.0539 \cdot \sqrt{\frac{0.3}{(2-0.3)}} = 52.59$

Tabla 4. Cálculo manual de los límites de los primeros cuatro valores de  $Z_i$

\* El cuarto límite se calculó con las fórmulas:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad \text{y} \quad LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

## Ejemplo 2 cambio deliberado de la media

Douglas Montgomery sugiere el siguiente ejercicio. De los siguientes 30 datos, los primeros 20 se obtuvieron de forma aleatoria de una distribución normal con media = 10 y desviación estándar = 1. Los siguientes 10 datos fueron tomados aleatoriamente de una distribución normal con media = 11 y desviación estándar = 1.

Los datos son los siguientes:

Muestra	Datos Montgomery
1	9.45
2	7.99
3	9.29
4	11.66
5	12.16
6	10.18
7	8.04
8	11.46
9	9.2
10	10.34
11	9.03
12	11.47
13	10.51
14	9.4
15	10.08

Muestra	Datos Montgomery
16	9.37
17	10.62
18	10.31
19	8.52
20	10.84
21	10.9
22	9.33
23	12.29
24	11.5
25	10.6
26	11.08
27	10.38
28	11.62
29	11.31
30	10.52

Tabla 5. Datos para Gráfico EWMA tomados de [Introduction to Statistical Control](#) de Douglas Montgomery

El gráfico EWMA con  $L=2.7$ ,  $\lambda=0.1$ , valor nominal = 10, y desviación estándar = 1 se muestra a continuación.

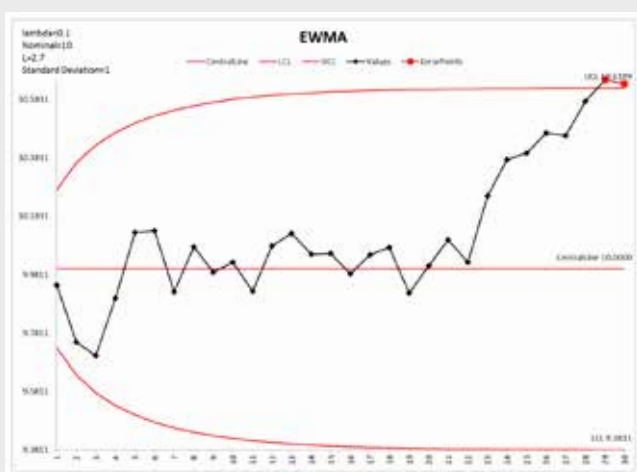


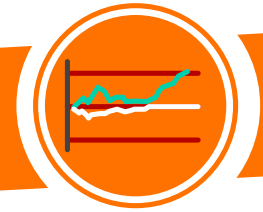
Gráfico 2. Gráfico de Control EWMA con estado fuera de control

En la muestra 29 se observa claramente un estado fuera de control. En las muestras precedentes ya se observaba una tendencia hacia arriba.

Cambios pequeños en la variación del proceso y ruido difícil de controlar son dos buenas razones para usar el gráfico EWMA.



# GRÁFICO CUSUM



El Gráfico de Sumas Acumuladas, generalmente llamado CuSum está hecho para identificar cambios pequeños pero constantes en la variable que está siendo medida. Previo a la era de las computadoras se usaba popularmente un procedimiento complicado y poco confiable, conocido como Máscara V. Veremos la forma tabular que es más confiable y fácil de entender.

## Usos

Para datos continuos (aunque también se puede usar el concepto de sumas acumuladas para atributos).

Se quieren detectar pequeños cambios en el proceso.

Se quiere controlar la variación alrededor de un

$$Z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$$

Es importante considerar toda la historia del proceso.

## Sumas acumuladas (el dato que se grafica)

La forma tabular del CuSum acumula valores que pueden estar por encima o por debajo de un valor objetivo ( $\mu_0$ ). Si el valor de la suma acumulada está por arriba del objetivo se denomina como  $C^+$ , y si está por debajo se denomina  $C^-$ . Ambos valores se calculan de la siguiente forma:

$$C_i^+ = \max [0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max [0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Donde:

Los valores iniciales de  $C_0^+ = C_0^- = 0$ .

K es un valor de referencia (generalmente llamado valor de holgura) y con frecuencia se determina como el valor que está a la mitad entre el valor objetivo  $\mu_0$ , y

valor fuera de control  $\mu_1$  que se desea detectar lo antes posible. Si  $\mu_1$  se expresa en términos de desviaciones estándar entonces:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma \text{ y } \delta = |\mu_1 - \mu_0|/\sigma$$

Finalmente, el valor de K se calcula como:

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{\delta\sigma}{2}$$

$\delta$  es el número de desviaciones estándar que se quiere detectar. Generalmente es igual a 1, aunque puede tomar otros valores menores dependiendo del valor de  $\mu_1$ .

Los límites de control se establecen a una distancia H a ambos lados del valor objetivo:

El valor más usado de H es 5. Baste por ahora decir que con H=5, el Tamaño Promedio de la Corrida (ARL-Average Run Length) es aproximadamente igual al de un gráfico de Shewart. ARL se define como la cantidad de muestras que deben ser graficadas antes de que se encuentre una muestra fuera de control. En el caso de los límites de los gráficos de control tradicionales X barra, se tiene:

Donde p es la probabilidad de encontrar un punto por encima o por debajo de los límites de control asumiendo una distribución normal. En el caso de los gráficos X Barra:

Límites de Control

Montgomery demuestra que  $H=5$  resulta en un ARL equivalente al de un gráfico X barra.

$$ARL = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.0027} \cong 370 \text{ muestras}$$

### Ejemplo 1 de Gráfico Cusum

Los siguientes datos son tomados del Engineering Statistics Handbook del NIST, en la [Sección 6.3.2.3 CuSum Control Charts](#) cada dato representa un promedio de 4 mediciones:

i	Datos NIST CuSum
1	324.925
2	324.675
3	324.725
4	324.35
5	325.35
6	325.225
7	324.125
8	324.525
9	325.225
10	324.6

i	Datos NIST CuSum
11	324.625
12	325.15
13	328.325
14	327.25
15	327.825
16	328.5
17	326.675
18	327.775
19	326.875
20	328.35

Tabla 1. Datos para gráfico CuSum  
de página del NIST (link indicado arriba)

Se desea establecer un gráfico CuSum con las siguientes características:

Valor Nominal (objetivo)	325
H (valor de los límites de control)	5
Desviación Estándar histórica del proceso *	0.635
K (desviación estándar entre 2)	0.3175
Delta	1

\* NOTA: Se asume el valor de 0.635 como el error estándar de la media puesto que los valores son promedios de cuatro mediciones.

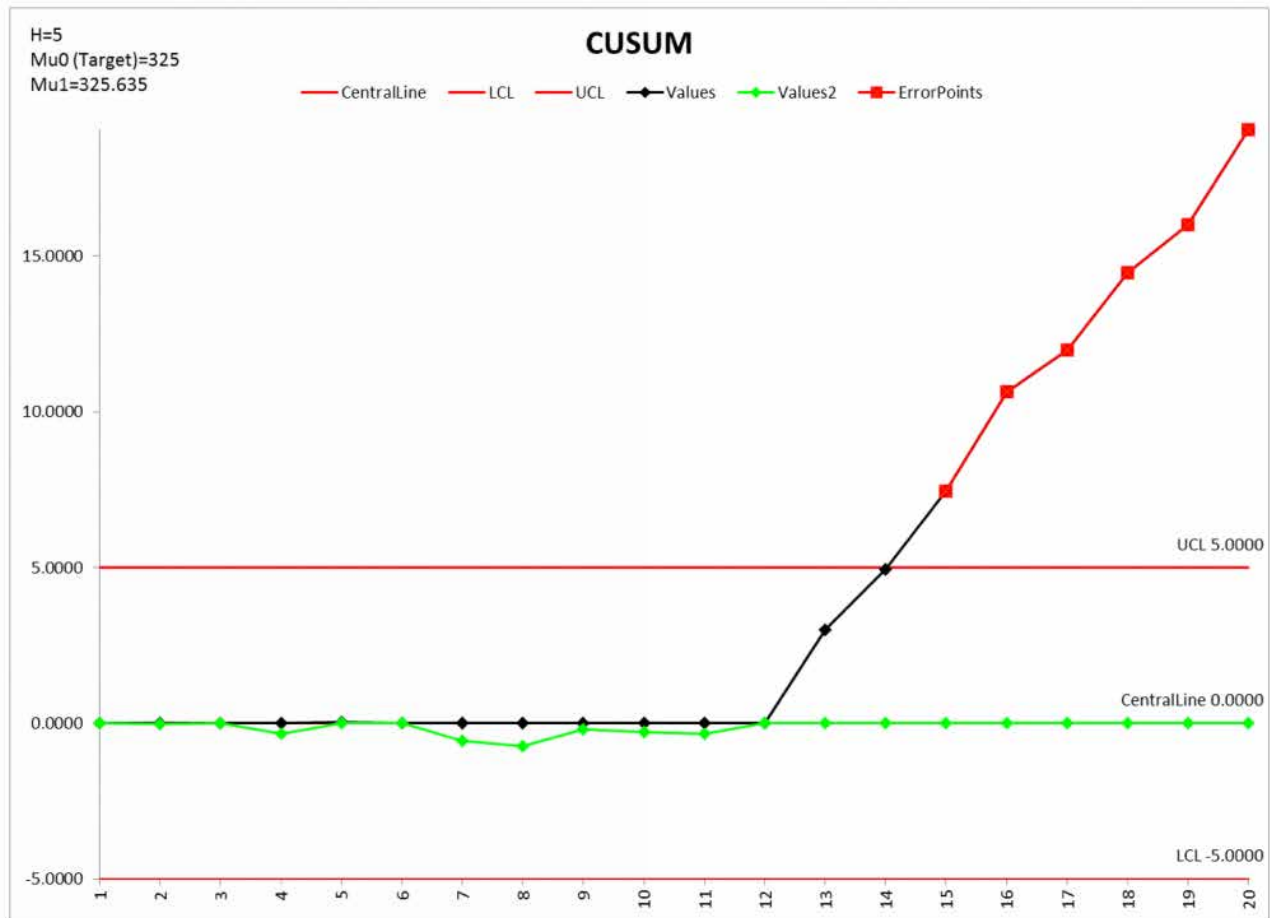


Gráfico 1. Gráfico de Control CuSum

El gráfico indica un estado de ausencia de control. Veamos los cálculos de los valores que componen el gráfico.

### Cálculo de los valores Ejemplo 1.

El valor inicial  $C_0$  para iniciar los cálculos es:

$$C_0 = \text{Valor Objetivo} = \mu_0 = 325$$

De ahí en adelante los valores a graficar se calculan mediante las fórmulas:

$$C_i^+ = \max [0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max [0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Donde:

Los valores iniciales de

i	Valor	$C_i^+ = \max [0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$	$C_i^- = \max [0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$	CuSum (valores que se grafican)
1	324.925	$C_1^+ = \max[0, 324.925 - (325 + 0.3175) + 0] = \max(0, -0.3925) = 0$	$C_1^- = \max[0, (325 - 0.3175) - 324.925 + 0] = \max(0, -0.2425) = 0$	$C_1^+ = 0$ $C_1^- = 0$
2	324.675	$C_2^+ = \max[0, 324.675 - (325 + 0.3175) + 0] = \max(0, -0.6425) = 0$	$C_2^- = \max[0, (325 - 0.3175) - 324.675 + 0] = \max(0, 0.0) = 0.01$	$C_2^+ = 0$ $C_2^- = 0.01$
3	324.725	$C_3^+ = \max[0, 324.725 - (325 + 0.3175) + 0] = \max(0, -0.5925) = 0$	$C_3^- = \max[0, (325 - 0.3175) - 324.725 + 0.01] = \max(0, -0.425) = 0$	$C_3^+ = 0$ $C_3^- = 0$

Tabla 2. Los tres primeros valores del Gráfico 1 CuSum

Puede confirmar el resto de los valores de  $C_i$

i	$C_i^+$	$C_i^-$	i	$C_i^+$	$C_i^-$
1	0.0000	0.0000	11	0.0000	-0.3250
2	0.0000	-0.0100	12	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	13	3.0100	0.0000
4	0.0000	-0.3350	14	4.9450	0.0000
5	0.0350	0.0000	15	7.4550	0.0000
6	0.0000	0.0000	16	10.6400	0.0000
7	0.0000	-0.5600	17	12.0000	0.0000
8	0.0000	-0.7200	18	14.4600	0.0000
9	0.0000	-0.1800	19	16.0200	0.0000
10	0.0000	-0.2650	20	19.0550	0.0000

Tabla 3. Todos los valores del Gráfico 1 CuSum

NOTA: los valores de  $C_i^-$  se toman negativos para que acumule hacia el lado de abajo del valor objetivo.

## Ejemplo 2 cambio deliberado de la media

Al igual que hicimos con el gráfico EWMA vamos a usar los datos de Douglas Montgomery para demostrar un cambio pequeño en el proceso. De los siguientes 30 datos, los primeros 20 se obtuvieron de forma aleatoria de una distribución normal con media = 10 y desviación estándar = 1. Los siguientes 10 datos fueron tomados aleatoriamente de una distribución normal con media = 11 y desviación estándar = 1.

Los datos son los siguientes:

Muestra	Datos Montgomery
1	9.45
2	7.99
3	9.29
4	11.66
5	12.16
6	10.18
7	8.04
8	11.46
9	9.2
10	10.34
11	9.03
12	11.47
13	10.51
14	9.4
15	10.08

Muestra	Datos Montgomery
16	9.37
17	10.62
18	10.31
19	8.52
20	10.84
21	10.9
22	9.33
23	12.29
24	11.5
25	10.6
26	11.08
27	10.38
28	11.62
29	11.31
30	10.52

Tabla 5. Datos para Gráfico CuSum tomados de [Introduction to Statistical Control](#) de Douglas Montgomery

Vamos a hacer el gráfico CuSum con  $\mu_0=10$ ,  $\mu_1=11$ , y desviación estándar = 1. Estamos interesados en un cambio de la media de 1 desviación estándar,  $K = \frac{1}{2}$  puesto que la desviación estándar es 1, y  $H=5$ .

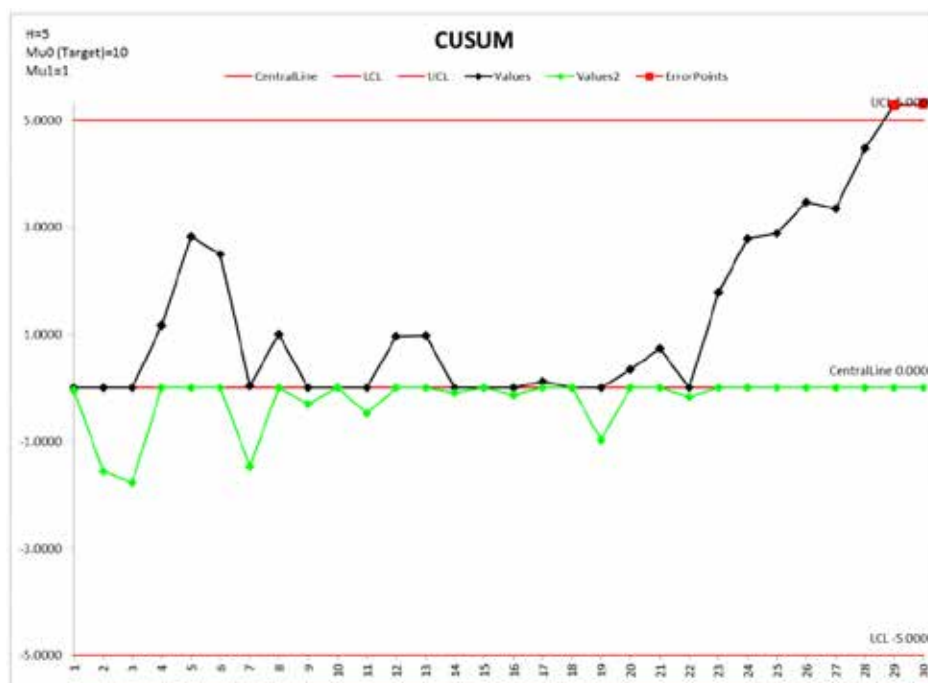
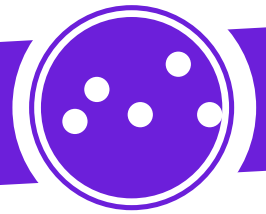


Gráfico 2. Gráfico de Control CuSum con estado fuera de control

# GRÁFICO DE PUNTOS INDIVIDUALES



Cuando el gráfico P (fracción defectuosa) se utiliza para determinar estabilidad en procesos con fracciones defectuosas muy pequeñas, tamaños de muestra muy grandes, o ambos, los límites de control se hacen tan pequeños que la herramienta pierde su valor para analizar estabilidad y ausencia o presencia de causas especiales de variación. Lo mismo pasa con el gráfico U (defectos por unidad). En ambos casos, como veremos en los siguientes ejemplos, las fórmulas tradicionales de cálculo de límites de control dividen en  $n$  muy grande y dejan de mostrar la variación natural del proceso en estudio.

Afortunadamente existen formas alternativas de devolver a los límites de control su poder de análisis de la estabilidad y variación de los procesos. En el caso de los gráficos P vamos a estudiar el

gráfico de puntos individuales (y sus potenciales peligros) y el gráfico P de Laney; y para el gráfico U veremos la forma alternativa de gráfico U de Laney.

## Gráfico de puntos individuales como alternativa al gráfico P

Forrest Breyfogle sugiere el uso de gráficos de puntos individuales para resolver el problema de las falsas alarmas de los límites P cuando  $n$  es muy grande y la distancia de los límites se vuelve muy pequeña. Esta alternativa depende de que se cumplan dos supuestos, primero el tamaño de subgrupo debe ser constante, y segundo las fracciones deben seguir un comportamiento normal. Si no se cumplen ambos supuestos todavía existe un chance de aproximadamente 1 en 10 de falsas alarmas (por teorema de Chebyshev, ahí perdonan mi escritura del ruso...). Recor-



demos que un buen gráfico de control, en particular el gráfico X-Barra R, tiene un chance de aproximadamente de 1 en 1000 de una falsa alarma (un punto fuera de los límites de control).

Veamos el siguiente ejemplo modificado de los datos de un proceso de una empresa de dispositivos médicos.

Día	Tamaño de la orden	Unidades aceptadas	Unidades rechazadas	Scrap
3/11/18	25000	24930	70	0.28%
3/12/18	7500	7390	110	1.47%
3/13/18	20000	18920	1080	5.40%
3/14/18	10000	9983	17	0.17%
3/15/18	12000	11950	50	0.42%
3/16/18	18000	17925	75	0.42%
3/17/18	20000	19975	25	0.13%
3/18/18	9000	8900	100	1.11%
3/19/18	20000	19762	238	1.19%
3/20/18	20000	20000	0	0.00%
3/21/18	15000	14980	20	0.13%
3/22/18	15000	14920	80	0.53%
3/23/18	20000	20000	0	0.00%
3/24/18	12000	11750	250	2.08%
3/25/18	10000	9370	630	6.30%
3/26/18	15000	14900	100	0.67%
3/27/18	15000	14977	23	0.15%
3/28/18	10000	9912	88	0.88%
3/29/18	22000	21978	22	0.10%
3/30/18	15000	14847	153	1.02%
3/31/18	7500	7490	10	0.13%

Tabla 1. Datos de scrap de un proceso.

Vemos de inmediato que tenemos tamaños de lote relativamente grandes y fracciones defectuosas (scrap) muy pequeñas. En principio la fracción defectuosa de este proceso debería poder controlarse con un gráfico P.



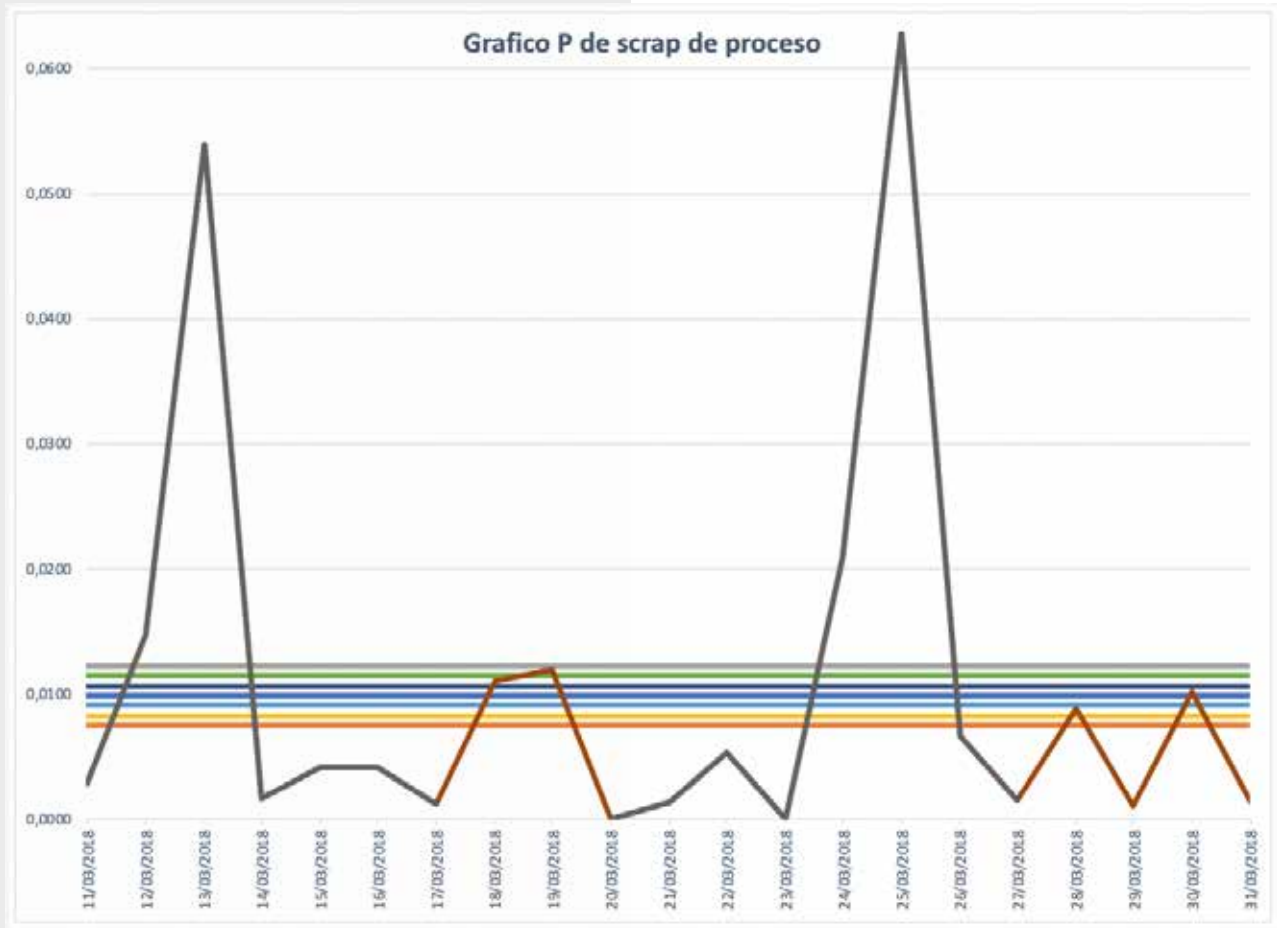


Figura 1. Gráfico P de control de scrap.

Hemos usado límites variables para reflejar los diferentes tamaños de lote, sin embargo, todavía existe la duda ¿está este proceso completamente fuera de control como se muestra en el gráfico?

Veamos las fórmulas de cálculo de límites para el gráfico P:

$$LIC_p = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

$$LSC_p = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

Cuando ese n es muy grande el límite deja de reflejar una variación de +/- 3 desviaciones estándar binomiales.

El gráfico de puntos individuales para la fracción defectuosa es un mejor estimador de las 3 desviaciones estándar hacia cada lado del centro.

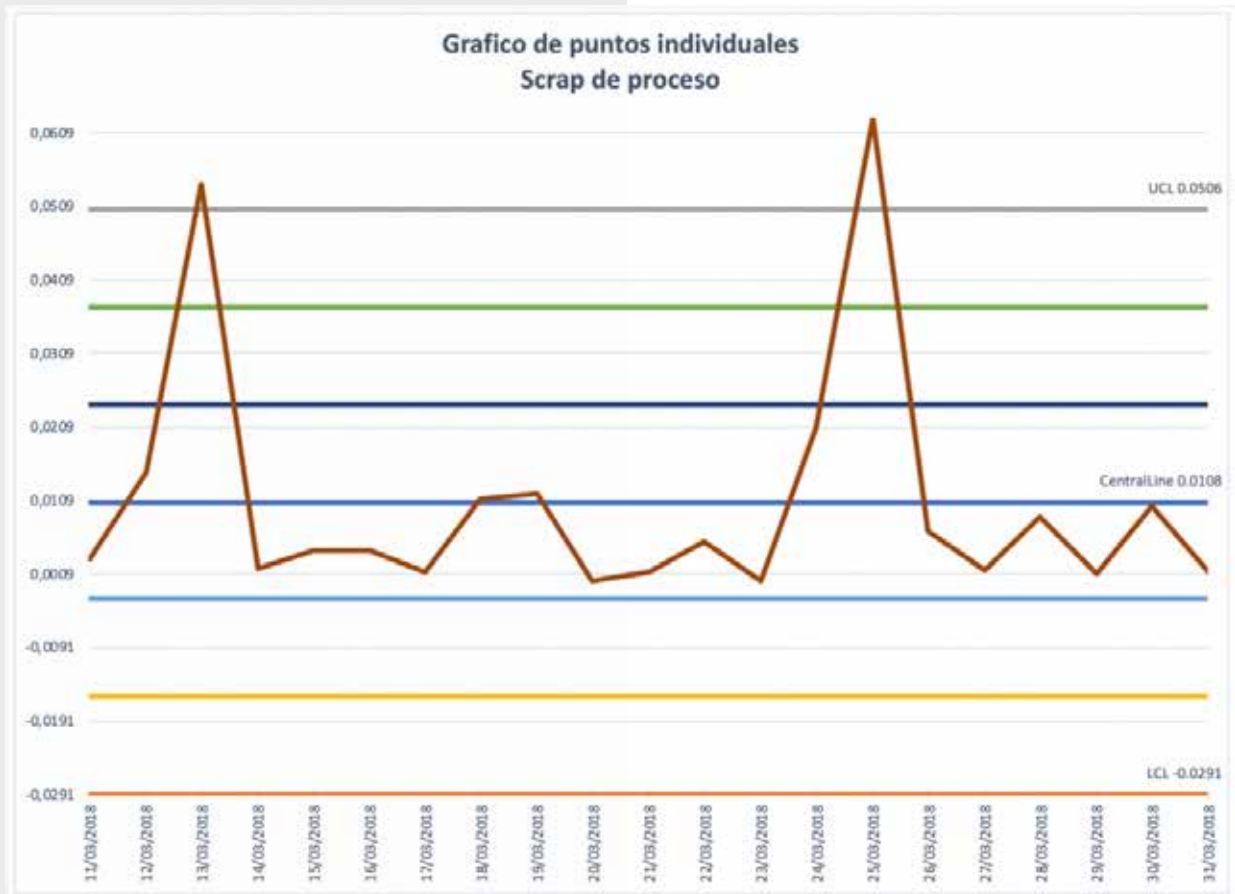


Figura 2. Gráfico de puntos individuales para el control de scrap.

Para este caso las fórmulas que aplican son las siguientes:

$$LIC_x = \bar{x} - E_2 \overline{MR}$$

$$LSC_x = \bar{x} + E_2 \overline{MR}$$

Nótese que se usa un rango móvil y una constante ( $E_2$ ) para construir el estimado de las 3 desviaciones estándar. Generalmente se utiliza un rango móvil de 2 lecturas en cuyo caso el valor de  $E_2$  es de 2.66.

Ver la siguiente tabla para una lista más completa de constantes para el gráfico de puntos individuales.

n	2	3	4	5
$D_4$	3.27	2.57	2.28	2.11
$D_3$	0	0	0	0
$E_2$	2.66	1.77	1.46	1.29

Tabla 2. Constantes para el gráfico de control de puntos individuales.  
Tomado del CSSBB Primer de Quality Council of Indiana.

Se muestra como ejemplo el cálculo del límite superior para el gráfico de puntos individuales.

Fecha	Scrap	Rango (2)	
11/03/2018	0.0028		
12/03/2018	0.0147	0.0119	$Rango1 = [0.0028 - 0.0147]$
13/03/2018	0.0540	0.0393	$Rango2 = [0.0147 - 0.0540]$
14/03/2018	0.0017	0.0523	
15/03/2018	0.0042	0.0025	
16/03/2018	0.0042	0.0000	
17/03/2018	0.0013	0.0029	
18/03/2018	0.0111	0.0098	
19/03/2018	0.0119	0.0008	
20/03/2018	0.0000	0.0119	
21/03/2018	0.0013	0.0013	
22/03/2018	0.0053	0.0040	
23/03/2018	0.0000	0.0053	
24/03/2018	0.0208	0.0208	
25/03/2018	0.0630	0.0422	
26/03/2018	0.0067	0.0563	
27/03/2018	0.0015	0.0052	
28/03/2018	0.0088	0.0073	
29/03/2018	0.0010	0.0078	
30/03/2018	0.0102	0.0092	
31/03/2018	0.0013	0.0089	$Rango\ final = [0.0092 - 0.0089]$
Scrap Promedio	0.0108		$\bar{Scrap}\ promedio$
Promedio		0.0150	$\overline{MR} = promedio\ de\ los\ rangos$
$E_2$		2.6600	Constante $E_2$ para rangos de 2
LSC		0.0506	$LSC_x = \bar{x} + E_2 \overline{MR} = 0.0018 + 2.66 * 0.0150 = 0.0506$

Figura 3. Cálculo del límite superior de control para el gráfico de puntos individuales.

Falta ahora determinar si las fracciones se pueden modelar de acuerdo con la Distribución Normal. La verificación gráfica es suficiente como se muestra a continuación.

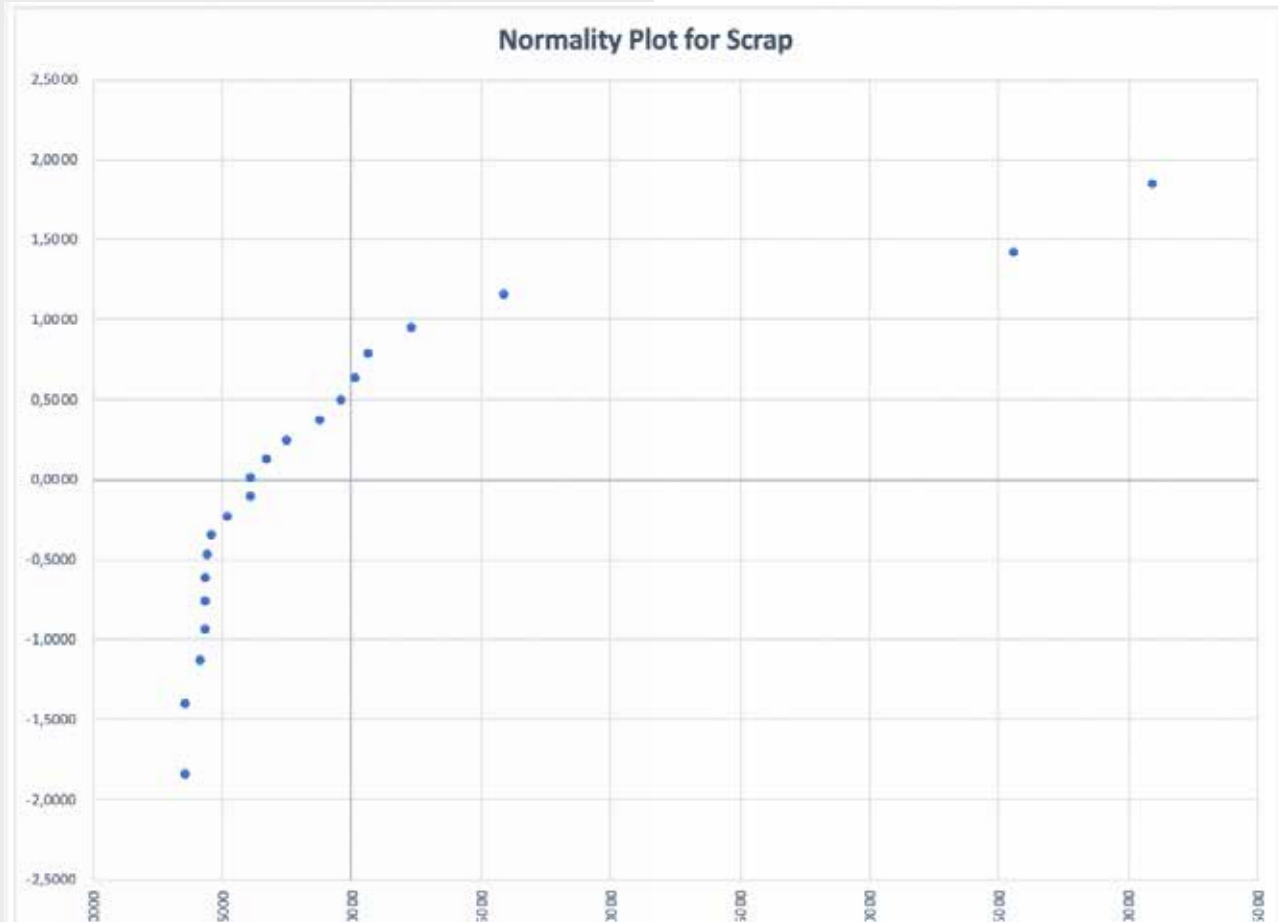


Figura 4. Gráfico de normalidad para los datos de scrap

La regla es que los datos sigan aproximadamente una línea recta proporcional (lineal).

Como puede verse en este caso los datos de scrap no se pueden considerar normales.

El gráfico de puntos individuales es una mejor forma de ver si la fracción de scrap está fuera de control. Sin embargo, para el ejemplo no se cumplió ninguno de los supuestos, tamaño de muestra constante y normalidad de los datos.

# GRÁFICO P' DE LANEY



David Laney propone una corrección al problema de grandes muestras (Quality Engineering 6/2002). De acuerdo con Laney es un error asumir que toda la variación se da dentro de cada muestra y no se considera la variación de muestra a muestra. La propuesta es usar un valor estandarizado Z y la determinación de una desviación estándar (sz) que explica la variación entre grupos.

A partir de la siguiente tabla vamos a realizar los cálculos para el gráfico P' de Laney.

Datos iniciales					Cálculos Gráfico de Laney							
Día	taman/o de la orden	Unidades aceptadas	Unidades rechazadas	Scrap	P (scrap) (1)	Centro (2)	Sigma P (3)	ZI (4)	Rangos (5)	sd(pi) (5)	LIC (6)	LSC (7)
3/11/18	25000	24930	70	0.28%	0.003	0.99%	0.0006255	-11.31557		0.0104779	0	0.041311
3/12/18	7500	7390	110	1.47%	0.015	0.99%	0.0011419	4.1940974	15.509664	0.0191299	0	0.0672671
3/13/18	20000	18920	1080	5.40%	0.054	0.99%	0.0006993	63.09742	58.903322	0.0117146	0	0.0450213
3/14/18	10000	9983	17	0.17%	0.002	0.99%	0.0009889	-8.268907	71.366327	0.016567	0	0.0595784
3/15/18	12000	11950	50	0.42%	0.004	0.99%	0.0009028	-6.325785	1.9431223	0.0151235	0	0.055248
3/16/18	18000	17925	75	0.42%	0.004	0.99%	0.0007371	-7.747473	1.4216878	0.0123483	0	0.0469223
3/17/18	20000	19975	25	0.13%	0.001	0.99%	0.0006993	-12.33752	4.5900489	0.0117146	0	0.0450213
3/18/18	9000	8900	100	1.11%	0.011	0.99%	0.0010424	1.1835441	13.521066	0.0174631	0	0.0622668
3/19/18	20000	19762	238	1.19%	0.012	0.99%	0.0006993	2.892471	1.7089269	0.0117146	0	0.0450213
3/20/18	20000	20000	0	0.00%	0.000	0.99%	0.0006993	-14.12508	17.017551	0.0117146	0	0.0450213
3/21/18	15000	14980	20	0.13%	0.001	0.99%	0.0008075	-10.5814	3.5436771	0.0135269	0	0.0504581
3/22/18	15000	14920	80	0.53%	0.005	0.99%	0.0008075	-5.627577	4.9538256	0.0135269	0	0.0504581
3/23/18	20000	20000	0	0.00%	0.000	0.99%	0.0006993	-14.12508	8.4975027	0.0117146	0	0.0450213
3/24/18	12000	11750	250	2.08%	0.021	0.99%	0.0009028	12.136033	26.261113	0.0151235	0	0.055248
3/25/18	10000	9370	630	6.30%	0.063	0.99%	0.0009889	53.717372	41.581339	0.016567	0	0.0595784
3/26/18	15000	14900	100	0.67%	0.007	0.99%	0.0008075	-3.976302	57.693674	0.0135269	0	0.0504581
3/27/18	15000	14977	23	0.15%	0.002	0.99%	0.0008075	-10.33371	6.3574096	0.0135269	0	0.0504581
3/28/18	10000	9912	88	0.88%	0.009	0.99%	0.0009889	-1.08942	9.2442915	0.016567	0	0.0595784
3/29/18	22000	21978	22	0.10%	0.001	0.99%	0.0006667	-13.31466	12.225244	0.0111695	0	0.0433858
3/30/18	15000	14847	153	1.02%	0.010	0.99%	0.0008075	0.3995774	13.714241	0.0135269	0	0.0504581
3/31/18	7500	7490	10	0.13%	0.001	0.99%	0.0011419	-7.482182	7.8817591	0.0191299	0	0.0672671
Sumas	318000	314859	3141					R promedio	18.89679			
Centro		0.99%						SigmaZ	16.752473			

Tabla 3. Cálculos para el gráfico P' de Laney.

Vamos a poner atención específica al lado derecho de la tabla:

Cálculos Gráfico de Laney							
P (scrap) (1)	Centro (2)	Sigma P (3)	Zi (4)	Rangos (5)	sd(pi) (6)	LIC (7)	LSC (8)
0.003	0.99%	0.000625453	-11.31556633		0.01047789	0	0.041311028
0.015	0.99%	0.001141916	4.194097391	15.50966372	0.019129922	0	0.067267125
0.054	0.99%	0.000699278	63.09741952	58.90332213	0.011714637	0	0.045021269
0.002	0.99%	0.000988929	-8.268907491	71.36632701	0.016566998	0	0.059578354
0.004	0.99%	0.000902764	-6.325785234	1.943122258	0.015123531	0	0.055247952
0.004	0.99%	0.000737104	-7.747473022	1.421687789	0.012348312	0	0.046922293
0.001	0.99%	0.000699278	-12.33752195	4.590048926	0.011714637	0	0.045021269
0.011	0.99%	0.001042422	1.183544084	13.52106603	0.01746315	0	0.062266808
0.012	0.99%	0.000699278	2.892470974	1.70892689	0.011714637	0	0.045021269
0.000	0.99%	0.000699278	-14.1250798	17.01755078	0.011714637	0	0.045021269
0.001	0.99%	0.000807457	-10.58140273	3.543677077	0.013526898	0	0.050458051
0.005	0.99%	0.000807457	-5.627577085	4.953825641	0.013526898	0	0.050458051
0.000	0.99%	0.000699278	-14.1250798	8.497502718	0.011714637	0	0.045021269
0.021	0.99%	0.000902764	12.1360329	26.26111271	0.015123531	0	0.055247952
0.063	0.99%	0.000988929	53.71737204	41.58133914	0.016566998	0	0.059578354
0.007	0.99%	0.000807457	-3.976301871	57.69367391	0.013526898	0	0.050458051
0.002	0.99%	0.000807457	-10.33371144	6.357409573	0.013526898	0	0.050458051
0.009	0.99%	0.000988929	-1.089419976	9.244291467	0.016566998	0	0.059578354
0.001	0.99%	0.000666735	-13.31466348	12.22524351	0.011169468	0	0.043385763
0.010	0.99%	0.000807457	0.399577446	13.71424093	0.013526898	0	0.050458051
0.001	0.99%	0.001141916	-7.482181622	7.881759068	0.019129922	0	0.067267125
			R promedio	18.89678956			
			SigmaZ	16.75247302			

Tabla 4. Detalle de los cálculos para el gráfico P`de Laney.

Columna 1: Todos los valores del scrap.

Columna 2: P promedio para el gráfico.

$$\bar{p} = \frac{\text{Total scrap}}{\text{Total producción}} = \frac{3141}{318000} = 0.99\%$$

Columna 3: Sigma p. Desviación estándar de cada muestra.

$$\sigma p_i = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_i}}$$

Ejemplo columna 3:

Para el primer valor de scrap = 0.003.

$$\sigma p_1 = \sqrt{\frac{0.0099(1 - 0.0099)}{25000}} = 0.000625$$

Columna 4: Valor normalizado Z.

$$z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma p_i}$$

Ejemplo columna 4:

Para el primer valor de scrap = 0.003.

$$z_1 = \frac{0.003 - 0.0099}{0.000625} = -11.315$$

Columna 5: Rango móvil para 2 unidades. Valor absoluto de la diferencia entre dos valores de z. Inicia en el segundo valor.

$$R_i = |z_{i-1} - z_i|$$



Ejemplo columna 5:

Para los valores 1 y 2 de z: -11.315 y 4.194.

$$R_2 = |z_1 - z_2| = |-11.314 - 4.194| = 15.509$$

Columna 6: desviación estándar para cada punto graficado (tomando en cuenta z).

$$sd(p_i) = \sigma p_i * \sigma z$$

Y  $\sigma z$  se calcula como:

$$\sigma z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

Donde MR es el promedio de todos los rangos móviles y 1.128 es el valor de la constante d2 para muestras de tamaño 2. Los valores de d2 dependen del tamaño de muestra de donde se calculó cada rango. Siempre para muestras de tamaño 2 el valor es 1.128. Puede consultar esta tabla para otros valores de d2 y otras constantes de gráficos de control.

Ejemplo columna 6:

6.1 Cálculo del valor de  $\sigma z$ .

$$\sigma z = \frac{18.8967}{1.128} = 16.75$$



6.2 Cálculo de  $sd(p_i)$  para el primer valor de scrap.

$$sd(p_1) = 0.000625 * 16.75 = 0.01048$$

Columna 7: Límite inferior de control.

$$LIC_i = \bar{p} - 3 * sd(p_i) \text{ o } LIC_i = 0 \text{ el mayor de los dos.}$$

Ejemplo columna 7:

Para el primer valor de scrap.

$$LIC_1 = 0.0099 - 3 * 0.01048 = -0.02154 \text{ o } LIC_i = 0. \text{ En este caso } 0 > -0.02154$$
$$LIC_1 = 0$$

Columna 8: Límite superior de control.

$$LSC_i = \bar{p} + 3 * sd(p_i) \text{ o } LSC_i = 1 \text{ el menor de los dos.}$$

Ejemplo columna 8:

Para el primer valor de scrap.

$$LSC_1 = 0.0099 + 3 * 0.01048 = 0.04131 \text{ o } LSC_1 = 1. \text{ En este caso } 0.04131 < 1.$$
$$LSC_1 = 0.04131$$

El gráfico completo luce de la siguiente manera:

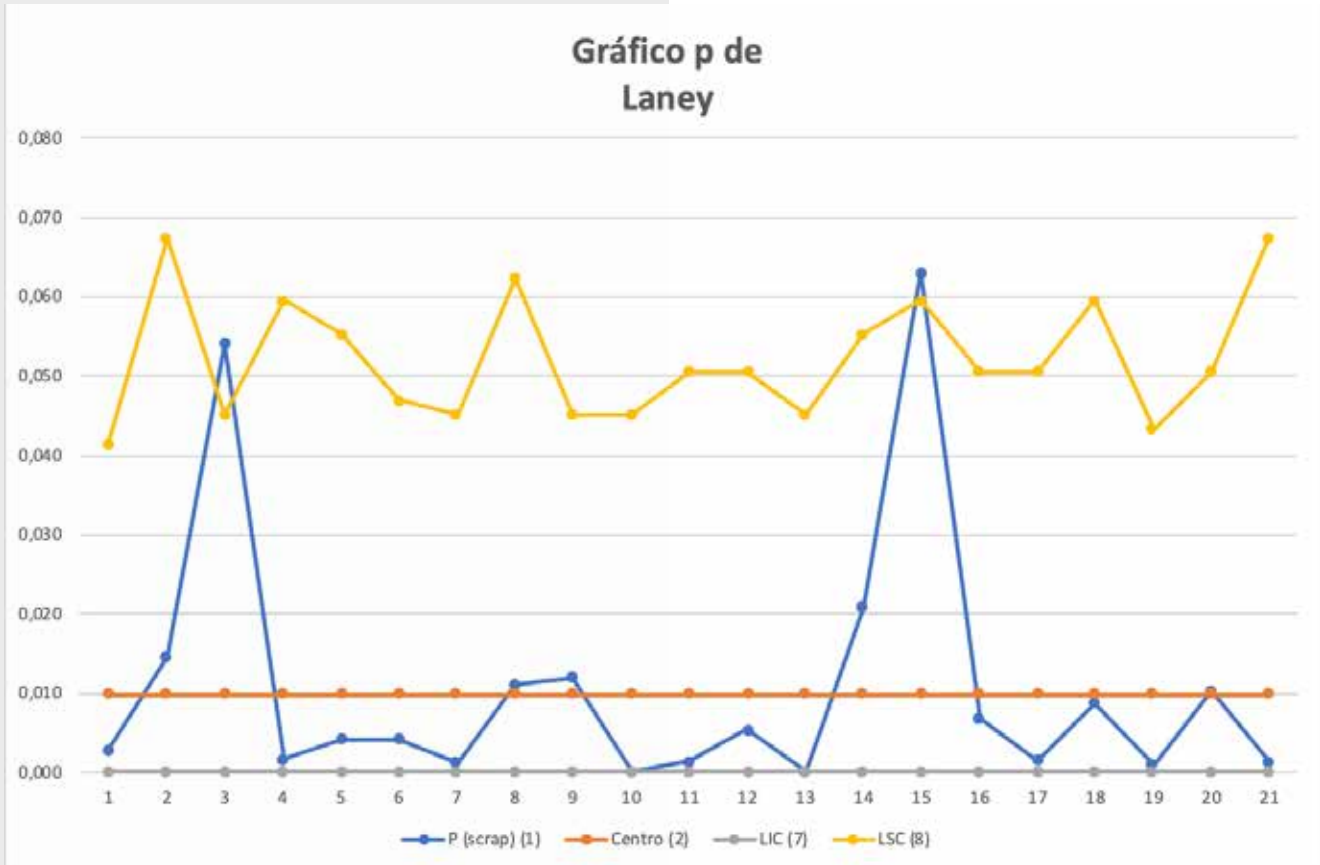


Figura 5. Gráfico P' de Laney para datos de scrap.

Hasta el momento hemos ido paso por paso con los cálculos que llevan a los límites de control de Laney. Siempre es importante entender el origen de los métodos y herramientas que utilizamos y por supuesto que agradecemos cuando este nivel de complejidad está disponible en software.

Tanto Minitab como qiMacros tienen disponibles los gráficos de Laney, no sólo para el caso de P sino también para el caso de los gráficos U (defectos por unidad), en R son fácilmente programables, aunque todavía no los veo disponibles en las librerías de SPC. La próxima semana trataremos más ejemplos alternativos tanto para P como para U, particularmente un ejemplo de miles de millones de transacciones que de otra manera sería muy difícil determinar si está bajo control o no.

Luego de tratar el detalle de los gráficos alternativos al gráfico P, esta semana vamos a hablar más sobre su aplicación, así como el gráfico U' de Laney. En esta ocasión vamos a usar Stat-Solver y Minitab pues no nos interesan tanto los cálculos.

### Gráfico de puntos individuales como alternativa al gráfico P en un entorno de servicios (Call Center).

Consideremos los siguientes datos:

Semana	Transacciones Rechazadas	Transacciones por semana	Fracción
1	883	100000	0.88%
2	858	100000	0.86%
3	611	100000	0.61%
4	763	100000	0.76%
5	754	100000	0.75%
6	737	100000	0.74%
7	643	100000	0.64%
8	683	100000	0.68%
9	613	100000	0.61%
10	867	100000	0.87%
11	554	100000	0.55%
12	593	100000	0.59%
13	663	100000	0.66%
14	757	100000	0.76%
15	475	100000	0.48%
16	865	100000	0.87%
17	771	100000	0.77%
18	855	100000	0.86%
19	978	100000	0.98%
20	961	100000	0.96%
21	837	100000	0.84%
22	640	100000	0.64%
23	976	100000	0.98%
24	840	100000	0.84%
25	739	100000	0.74%
26	731	100000	0.73%
27	648	100000	0.65%
28	955	100000	0.96%
29	670	100000	0.67%
30	900	100000	0.90%

Tabla 1. Datos de transacciones rechazadas en un call center durante 30 días.

Con 100,000 transacciones por semana el gráfico p tradicional no tiene capacidad de responder a la variación de muestra a muestra, en este caso de día a día, y debido al tamaño del subgrupo los límites de control serán muy angostos y por lo tanto muy propensos a falsas alarmas. Vamos a hacer un gráfico de puntos individuales y luego revisaremos los dos supuestos que validan su uso en lugar de un p.

Primero veamos el gráfico p tradicional.

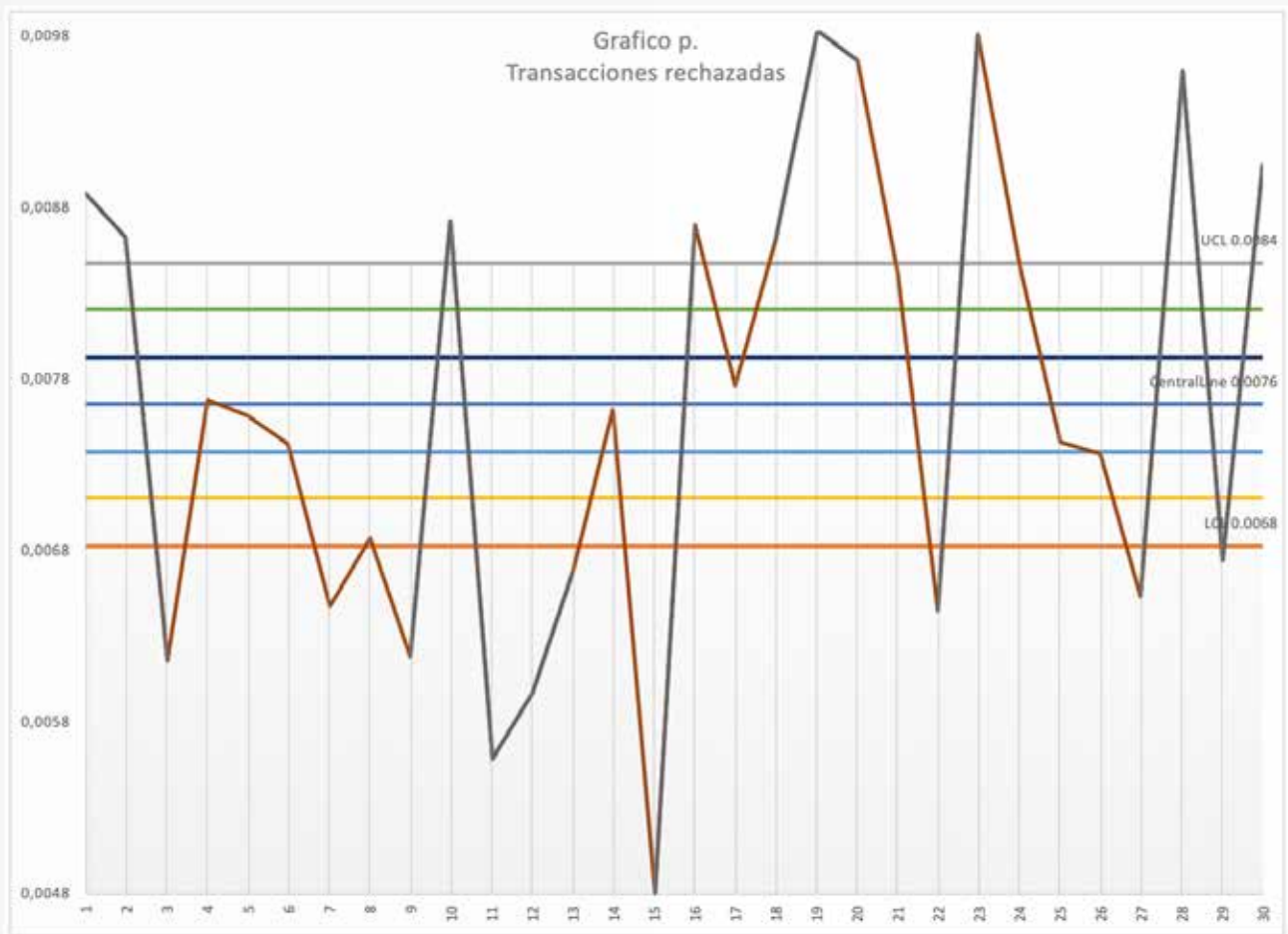
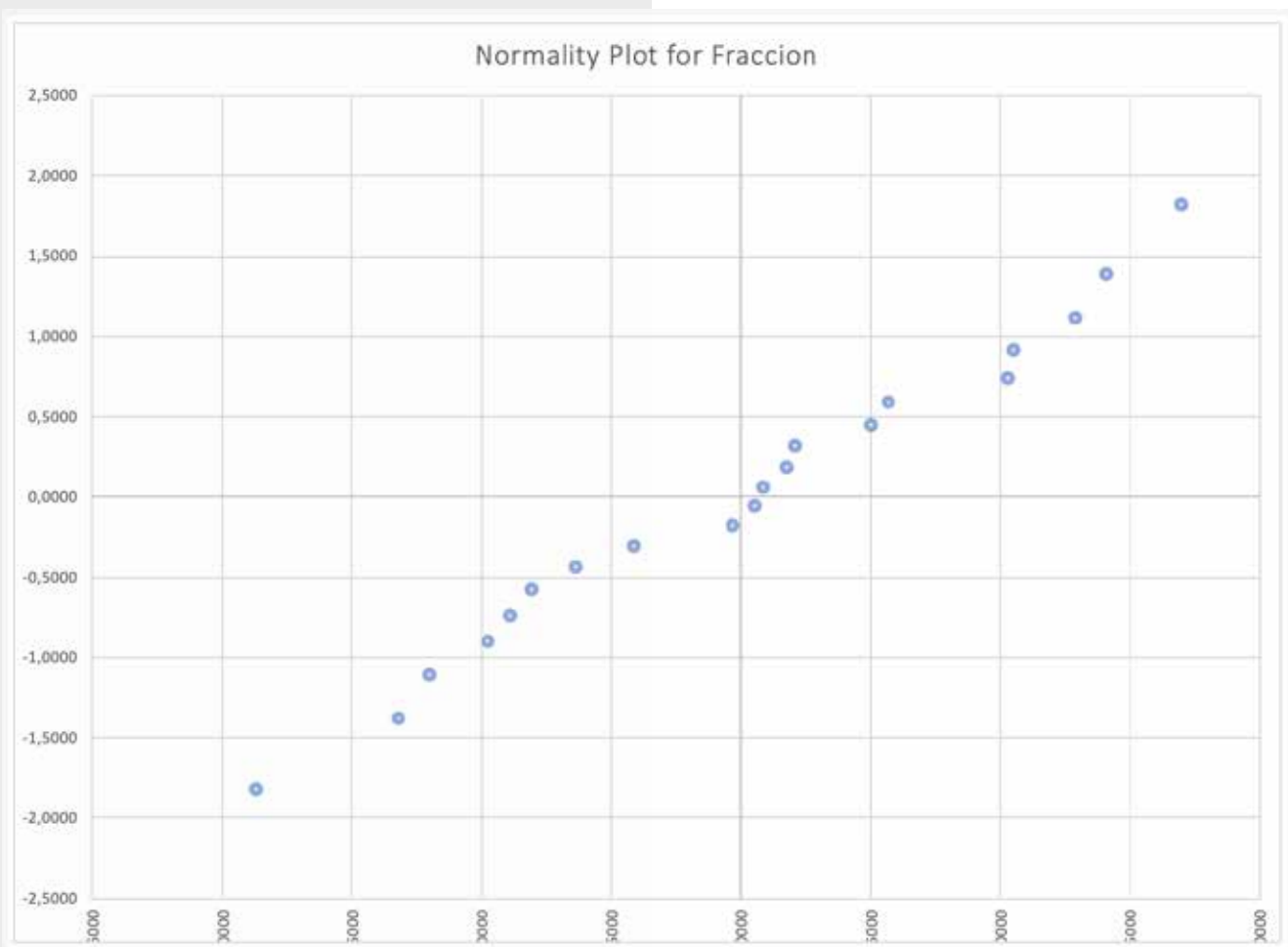


Figura 1. Gráfico p para la fracción de transacciones rechazadas en un call center.

Con un tamaño de muestra de 100,000 transacciones por día, el gráfico no tiene capacidad de responder a las diferencias en la variación de día a día y además con un  $n$  tan grande los límites de control se cierran y se acercan al centro.

La alternativa de utilizar un gráfico de puntos individuales depende de que se cumplan dos supuestos. Primero que el tamaño de muestra es constante lo cual se cumple pues todos los días se procesa el mismo número de transacciones (100,000), y segundo que las fracciones rechazadas se comportan de acuerdo con la Distribución Normal.



*Figura 2. Gráfico de normalidad para la fracción de transacciones rechazadas.*

El análisis visual es suficiente para determinar que las fracciones siguen un comportamiento normal.

Para tranquilidad y mayor seguridad se realiza una prueba de normalidad Anderson-Darling con el siguiente resultado:

Basic Statistics for Fracción	
Anderson Darling Test	
AD Statistic	0.203673879
AD Critical Value	0.7209
AD p-Value	0.8550

Con un p-value de 0.8550 se confirma la normalidad de los datos.

El p-value se compara con un valor base, generalmente 0.05 a menos que se indique otra cosa. Cualquier resultado mayor al valor base significa que no se puede rechazar la hipótesis nula, en este caso que los datos son normales. La hipótesis alternativa sería que los datos NO son normales.

Dado que se cumplen los dos supuestos podemos entonces hacer un gráfico de puntos individuales para determinar el estado del proceso.



Figura 3. Gráfico de puntos individuales para la fracción de transacciones rechazadas en un call center.

El proceso se encuentra bajo control, no hay razón de alarma.

Gráfico P' de Laney como alternativa al gráfico P en un entorno de servicios (Call Center).

No está demás hacer también el gráfico P' de Laney para este caso. Esta vez usaremos Minitab.

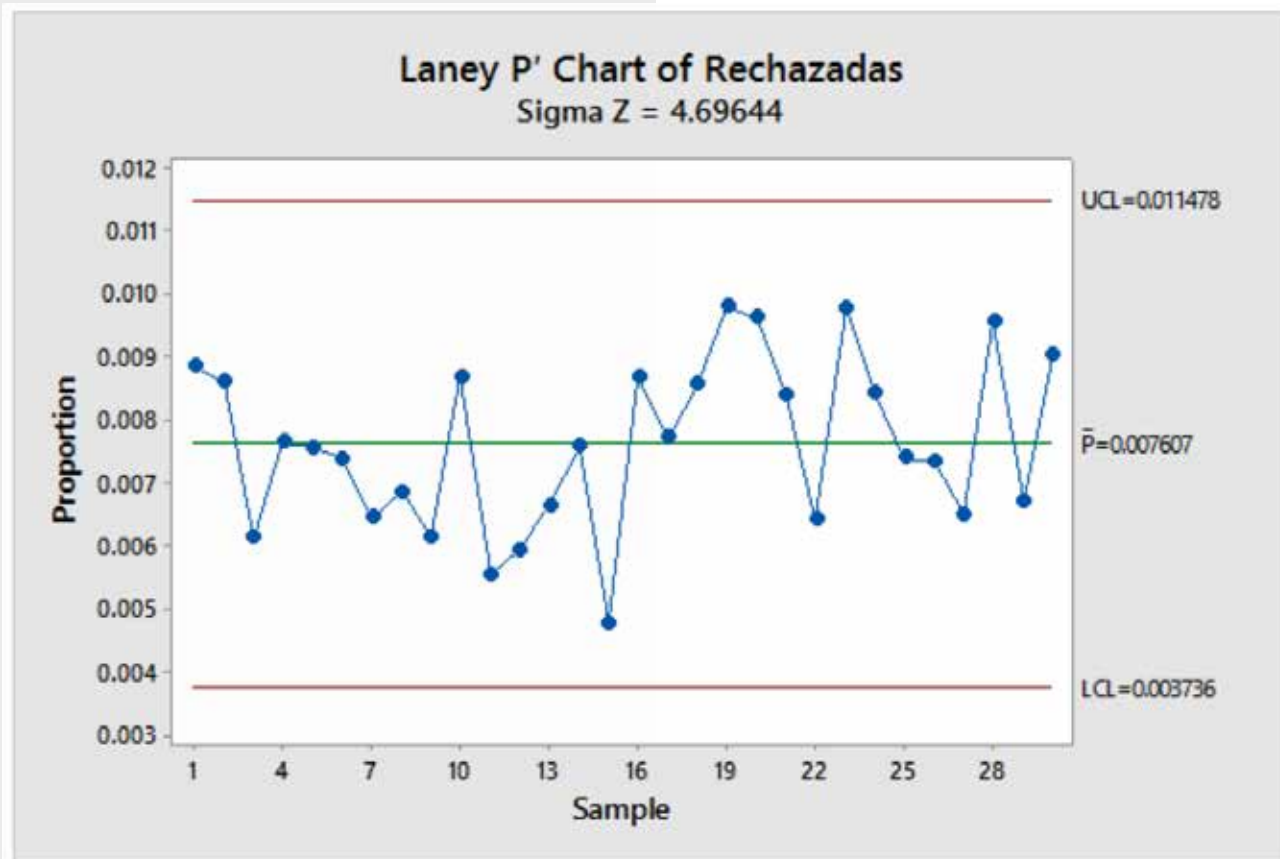


Figura 4. Gráfico P' de Laney para la fracción de transacciones rechazadas en un call center.

Como era de esperar obtenemos el mismo resultado, un proceso bajo control.

### Caso del gráfico U' de Laney

El gráfico U presenta una situación parecida al gráfico P cuando los tamaños de muestra se hacen muy grandes. Vamos a presentar el caso de maletas mal manejadas por las aerolíneas. Por “mal manejadas” (MMM) entendemos perdidas, robadas, maltratadas, que no llegan al destino al mismo tiempo que los pasajeros. El indicador que usa la industria de la aviación comercial es maletas mal manejadas por mil pasajeros (MMM/1,000 pasajeros).



Veamos los datos antes de seguir adelante:

Año	Maletas (valores aproximados)	Total Pasajeros	% MMM	MMM/1000 pasajeros
<b>2007</b>	46,900,000	2,480,000,000	1.89%	18.9113
<b>2008</b>	38,000,000	2,489,000,000	1.53%	15.2672
<b>2009</b>	29,500,000	2,479,000,000	1.19%	11.9
<b>2010</b>	30,000,000	2,695,000,000	1.11%	11.1317
<b>2011</b>	24,500,000	2,859,000,000	0.86%	8.5694
<b>2012</b>	25,000,000	2,991,000,000	0.84%	8.3584
<b>2013</b>	21,000,000	3,143,000,000	0.67%	6.6815
<b>2014</b>	22,000,000	3,326,000,000	0.66%	6.6146
<b>2015</b>	21,900,000	3,565,000,000	0.61%	6.1431
<b>2016</b>	21,900,000	3,815,000,000	0.57%	5.7405
<b>2017</b>	22,700,000	4,093,000,000	0.55%	5.5461

*Tabla 2. Datos de Maletas Mal Manejadas (MMM)/mil pasajeros.*

*Datos tomados de <https://www.avianews.com/wp-content/uploads/2018/04/baggage-report-2018.pdf>*

Estamos hablando de millones de maletas y varios miles de millones de pasajeros. El caso es aproximadamente Poisson con una tasa de ocurrencias por unidad (MMM/mil pasajeros). Claramente aplica el gráfico U.

Comencemos por hacer un gráfico U tradicional del índice MMM/mil pasajeros.



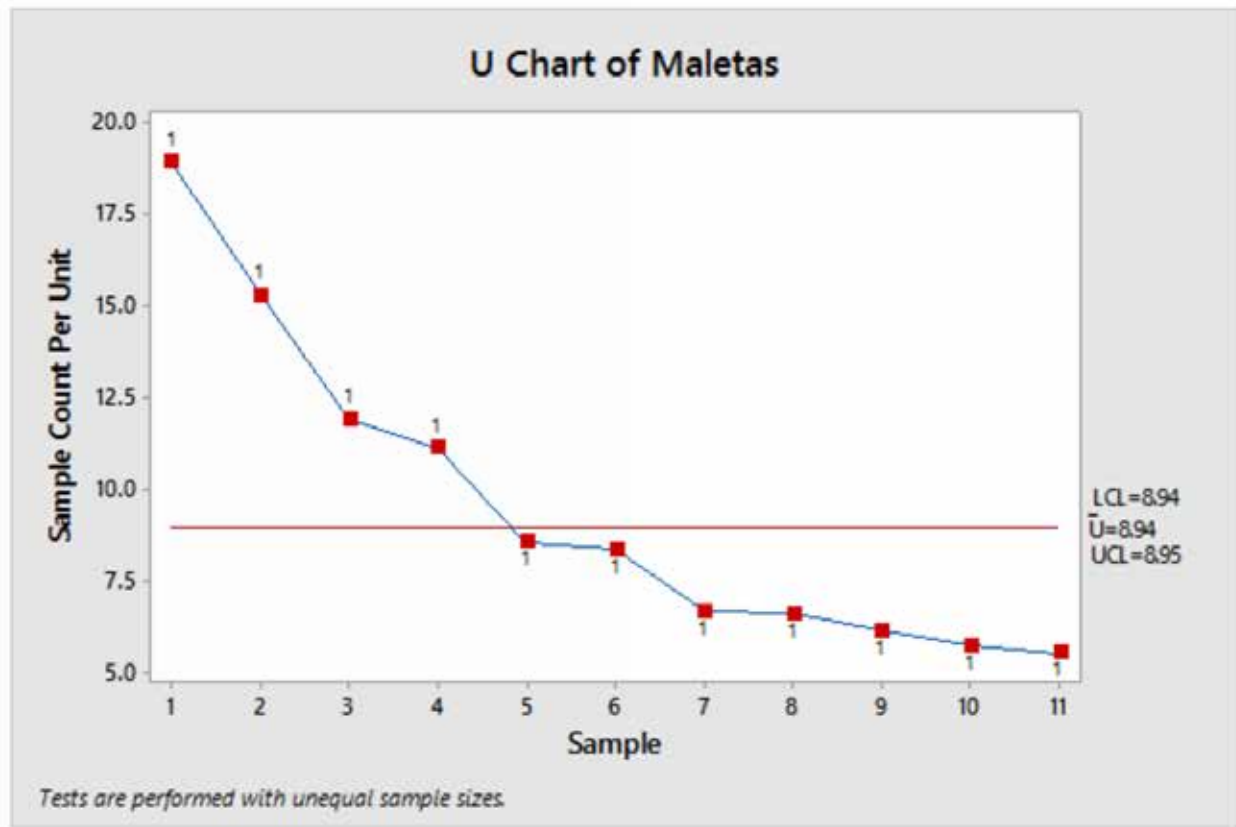


Figura 4. Gráfico U de Maletas Mal Manejadas/mil pasajeros.

Recordemos las fórmulas tradicionales para el gráfico U.

$$\text{Centro} = \bar{u} = \frac{c}{n} = \frac{303,400,000 \text{ maletas}}{33,935,000 \text{ miles de pasajeros}} = \frac{8.94 \text{ MMM}}{\text{mil pasajeros}}$$

$$LIC_u = \bar{u} - \sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

$$LSC_u = \bar{u} + \sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

En el caso del gráfico de la figura 4, usando un tamaño de muestra promedio de 3,085,000 miles de pasajeros se obtienen los valores de 8.94 y 8.95 respectivamente para los límites inferior y superior. Los límites no agregan ninguna información de valor al análisis.

Usemos ahora el gráfico U' de Laney.

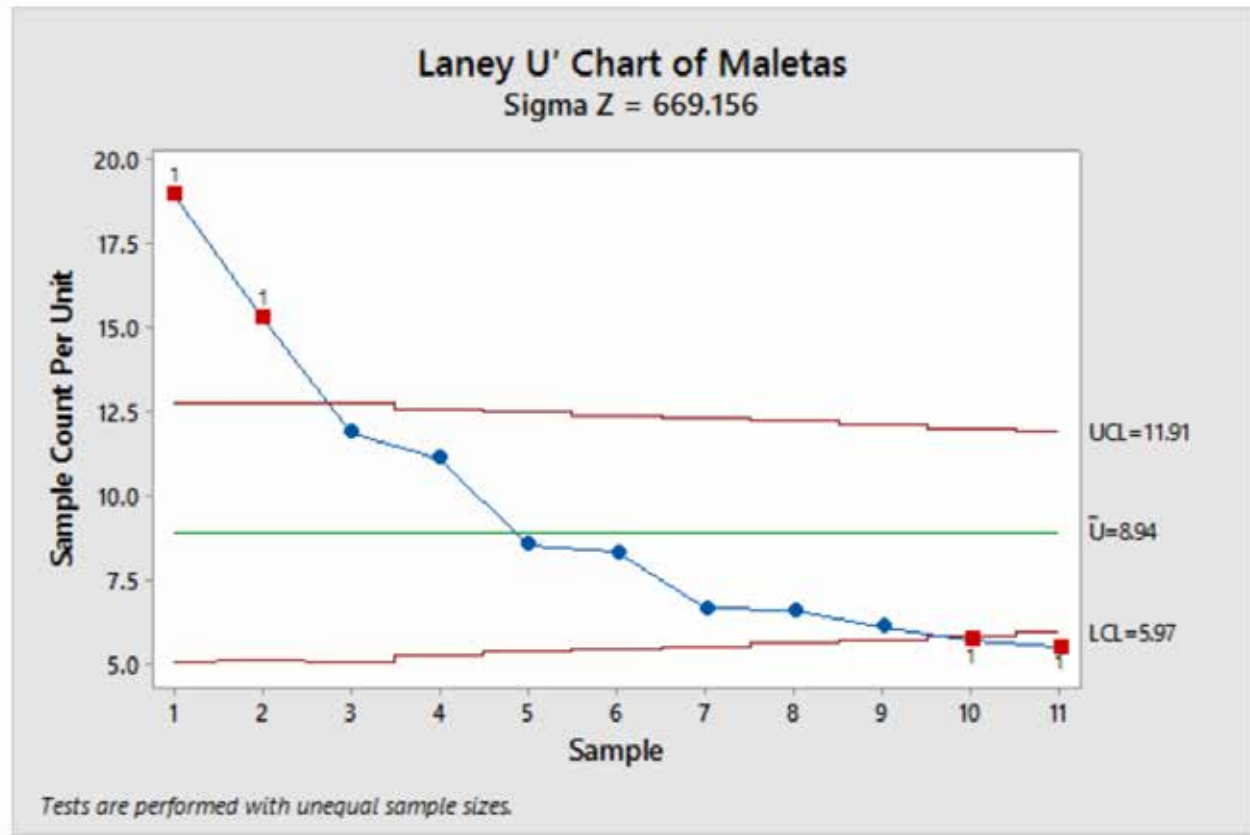


Figura 5. Gráfico U' de Laney de Maletas Mal Manejadas/mil pasajeros.

Es obvio que hay una gran mejora en el manejo de maletas, los nuevos límites verifican un estado fuera de control a favor del pasajero. Tener límites que reflejen la variación año con año nos van a permitir hacer un análisis diferente.

A partir del año 2013 (muestra 7) la pendiente pierde fuerza. Aprovechemos el gráfico U' de Laney para ver un antes y un después del año 2013.

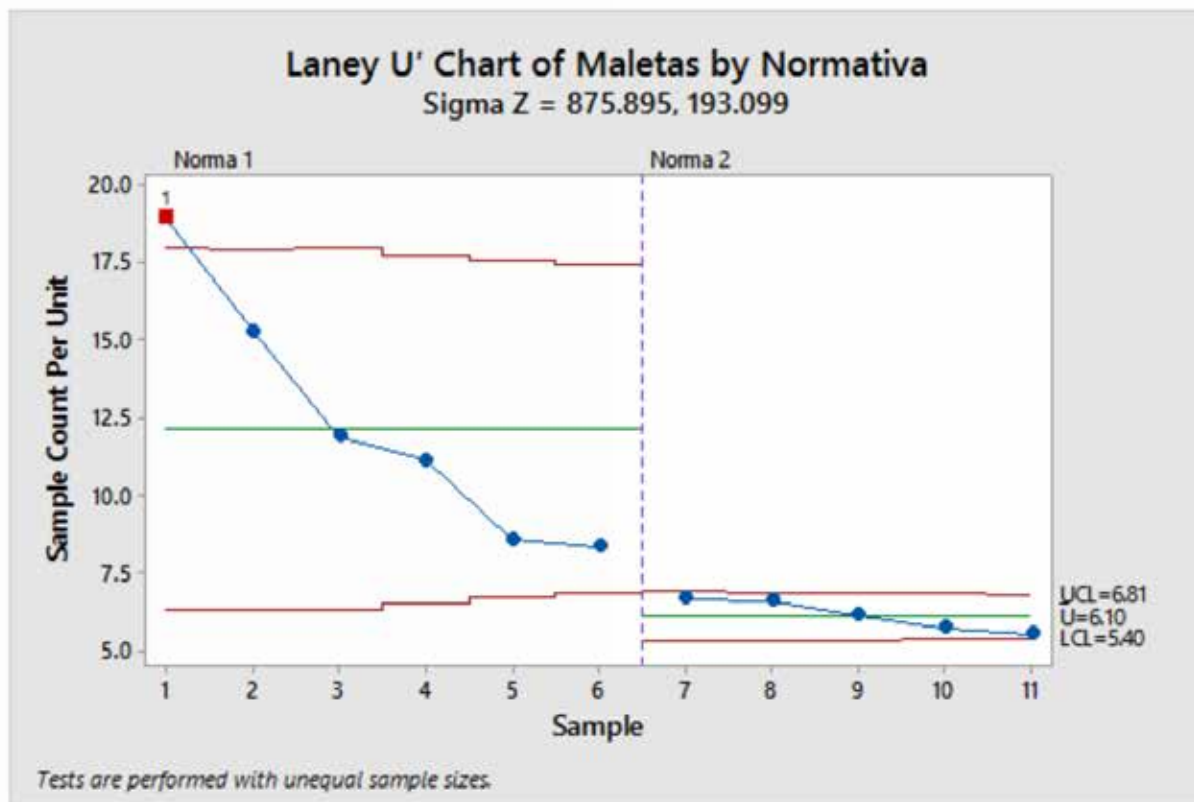


Figura 6. Gráfico U' de Laney de Maletas Mal Manejadas/mil pasajeros.

A partir del año 2013 el proceso de manejo de maletas se ha estabilizado a pesar de mantener una tendencia hacia la mejora. Interesantemente en el año 2018 la industria de aviación comercial determino nuevos estándares de manejo de maletas que se deberían ver reflejados a partir del 2019. Esperaremos los resultados de los próximos años para ver si continua la mejora a favor de los pasajeros. Si le damos vuelta al indicador en el 2007 había una maleta mal manejada por cada 53 pasajeros aproximadamente, y en el 2017 ese número fue una maleta MMM por cada 180 pasajeros. Todavía estamos hablando de 1 maleta MMM por avión “pequeño” tipo Airbus 320 o Boeing 737, y de 2 a 3 maletas MMM por vuelo en los aviones más grandes como Airbus 380 o Boeing 777.

Las fórmulas de los gráficos U' de Laney son las siguientes:

Puntos a graficar:

$$u_i = \frac{x_i}{n_i}$$

Donde:  $x_i$  es el número de defectos en el subgrupo  $i$ .  
 $n_i$  es el tamaño del subgrupo  $i$ .

Línea central:

$$\bar{u} = \frac{\sum x_i}{\sum n_i}$$

Sigma z:

$$z_i = \frac{(u_i - \bar{u})}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

Se calcula el rango móvil para cada par de  $z_i$ :

$$Rango_i = |z_{i-1} - z_i| \text{ empezando en el segundo valor } i = 2$$

A partir de todos los rangos se obtiene el rango móvil promedio MR.

Y el valor de sigma z es:

$$\sigma z = \overline{MR} * 1.128$$

Donde 1.128 es el valor de la constante d2 para subgrupos de 2. Donde 2 es el subgrupo que se utilizó para el cálculo de los rangos móviles.

Límites de control

$$LIC_u = \bar{u} - 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} * \sigma z \quad LSC_u = \bar{u} + 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} * \sigma z$$

De acuerdo con Laney, la oportunidad para utilizar sus gráficos P' y U' es... siempre. Los valores de sigma z toman en cuenta la variación entre muestras, más allá de la variación dentro de muestras de los gráficos tradicionales p y U.

La próxima vez que tenga que tomar una decisión utilizando un gráfico p o un gráfico U, considere utilizar gráficos alternativos que le permitan rectificar los problemas derivados de grandes tamaños de muestra.